

LA TRIGONOMETRIA EN EL MÓN ÀRAB. TRACTAT SOBRE EL QUADRILÀTER COMPLET DE NAŞİR AL-DİN AL-ṬŪSĪ (1201-1274)

M. Fàtima Romero Vallhonestà (1); M. Rosa Massa Esteve (2); M. Àngels Casals Puit (3)

(1) Inspecció d'Educació; (2) Centre per a la recerca d'Història de la Tècnica (UPC); (3) IES Joan Corominas.

Paraules clau: *trigonometria, Naşir al-Din al-Ṭūsī, àrabs, teorema del sinus, ensenyament.*

Trigonometry in the arabic world: «Treatise about the complete quadrilateral» of Naşir al-Din al-Ṭūsī (1201-1274).

Summary: *History can be useful for teaching Science. This paper analyses the demonstration of theorem of sinus of Naşir al-Din al-Ṭūsī as an example for using it in a secondary school when we introduce trigonometry in the classroom.*

Key words: *trigonometry, Naşir al-Din al-Ṭūsī, arabic, theorem of sinus, teaching.*

1. Introducció

La utilització de la història de la matemàtica a l'aula, com a recurs implícit i explícit, permet millorar l'ensenyament de la matemàtica i la formació integral de l'alumnat (Massa, 2003). La història de la matemàtica, com a recurs implícit, pot ser emprada en la fase de disseny d'una programació, per seleccionar context, els problemes i les fonts auxiliars, tenint en compte sempre la rellevància per a l'ensenyament de la gènesi dels problemes, les proves que van afavorir el desenvolupament d'una idea o d'un concepte. L'evolució històrica d'un concepte matemàtic pot mostrar, doncs, les dificultats d'aprenentatge que pot tenir l'alumne i, alhora, pot indicar un possible camí per a la docència d'aquest concepte. La història de la matemàtica també pot ésser utilitzada explícitament, sigui en els treballs de recerca dels alumnes de segon de batxillerat, en els crèdits variables de disseny propi, o bé en la celebració de jornades o centenaris, tot afavorint una formació més integral de l'alumnat. Però, sobretot, la història pot ésser utilitzada per introduir o per ajudar a assolir millor determinats conceptes matemàtics mitjançant l'anàlisi de textos històrics seleccionats.

Aquest article fa referència a aquest últim enfocament i forma part d'un projecte més

ampli del Grup d'Història de les Matemàtiques¹ de l'Associació de Barcelona per a l'Ensenyament i l'Aprenentatge de les Matemàtiques (ABEAM) que investiga: «El naixement i desenvolupament de la trigonometria dins de les diferents civilitzacions». L'objectiu del projecte és seleccionar textos originals rellevants dins la història de la trigonometria que ajudin l'alumne a assolir millor els conceptes trigonomètrics. La investigació se centra en el període que abasta des de l'antiguitat fins a l'època de Regiomontanus. Les obres analitzades fins ara són els *Elements* d'Euclides (300 aC), l'*Almagest* de Ptolemeu (90-168 dC), *Sobre les mides i distàncies del Sol i la Lluna* d'Aristarc de Samos (310-230 aC) i *De triangulis omnimodis* de Regiomontanus (1436-1476).² En aquest article ens centrarem en l'anàlisi de part de l'obra *Tractat sobre el quadrilàter complet* (1260) de Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (1201-1274) per il·lustrar l'aportació dels àrabs a la ciència trigonomètrica. Aquesta obra és significativa pel tractament sistemàtic que fa al-Ṭūsī de la trigonometria plana i esfèrica i també perquè és palesa la influència d'aquesta obra en *De triangulis omnimodis* (1464) de Regiomontanus, on es recopila va el saber trigonomètric de l'època i s'introdueix a Europa els avenços trigonomètrics àrabs.

2. La trigonometria en el món àrab

A través del contacte amb els diferents pobles conquerits, els àrabs van adquirir uns coneixements d'origen grec, assiri, persa i hindú, sobre els quals es fonamentà el seu saber. Els historiadors Adolf P. Youschkevitch (1976), Julio Samsó (1969), M. Victoria Villuendas (1979) i Marie-Thérèse Debarnot (1997) ja especifiquen en els seus treballs la importància de la contribució de diferents autors àrabs en el desenvolupament de la trigonometria.

Els astrònoms àrabs, utilitzant fonts gregues i hindús, van avançar molt en la trigonometria esfèrica. La resolució de problemes trigonomètrics era de gran ajuda per poder calcular distàncies en astronomia i la resolució de triangles esfèrics s'utilitzava per poder conèixer la direcció de la Meca. Les obres fonamentals en què es van basar els àrabs per al tractament de la trigonometria van ser: els *Elements* (300 aC) d'Euclides, *Les esfèriques* (80 dC) de Menelau (de la qual només es conserva la traducció àrab), l'*Almagest* (150 dC) de Ptolemeu i textos astronòmics hindús, com ara *Sūryasiddhānta* (400 dC) i *Āryabhaṭīya* (510 dC) d'Āryabhaṭa (476-550).³

Es pot considerar que els àrabs van ser els primers a fer un tractament sistemàtic de la trigonometria com a ciència molt evolucionada i independent de les seves aplicacions en l'astronomia i altres ciències.

Les seves contribucions al desenvolupament de la trigonometria es concreten en: a) la introducció de les sis raons trigonomètriques a partir de les demostracions del teorema de

1. El Grup d'Història de les Matemàtiques es va formar el curs 1999-2000 i pertany a l'Institut de Ciències de l'Educació (ICE) de la Universitat de Barcelona. Els membres del grup són M. Àngels Casals Puit (IES Joan Corominas), Iolanda Guevara Casanova (IES Badalona VII), Paco Moreno Rigall (IES XXV Olimpíada), Fàtima Romero Vallhonestà (Inspecció Comarques) i M. Rosa Massa Esteve (IES Vall d'Hebron), coordinadora del grup.

2. Vegeu els articles ja publicats que tracten de l'*Almagest* (Massa, Romero, 2003), de *De triangulis omnimodis* (Guevara, Casals, 2003) i de *Sobre les mides i distàncies del Sol i la Lluna* (Massa, 2005).

3. Més informació a Wussing (1998), p. 86-87 i Villuendas (1981), p. 44-45.

Menelau en triangles esfèrics. Aquí podem citar Ṭābit b. Qurra (836-901), al-Battānī (900 dC), al-Bīrūnī (973-1048) i Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (1201-1274);⁴ *b*) la deducció del teorema del sinus i el teorema de les tangents (tant per a triangles plans com esfèrics) i la construcció de taules trigonomètriques molt més detallades, fent servir procediments d'interpolació lineal, quadràtica i resolució d'equacions cúbiques per mètodes iteratius. Aquí podem citar, a tall d'exemple, les taules de sinus d'al-Ḥwārizmī (846 dC) explicades a Mc Carthy (2003: 245-250) i Samsó (1980: 63) i les taules de tangents d'Ibn Mu'ād (989-1050) analitzades a Villuendas (1979) i Samsó (1980: 62-63).

3. Abū Ja'far Muḥammad ibn Muḥammad Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (1201-1274). Trets biogràfics.⁵

Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī va néixer el 18 de febrer de l'any 1201 a Ṭūs (Khorāsān), actualment Iran, i va morir el 26 de juny de 1274 a Kadhimain, durant un viatge a Bagdad. Als voltants de l'any 1250, quan la ciutat de Kadhimain va ser conquerida pels mongols, al-Ṭūsī va passar a formar part del cercle de col·laboradors del nou sobirà, Hūlāgū Ḥān, i va planificar la construcció d'un observatori a Marāgha, al nord-oest de l'Iran. Aquest observatori va ser inaugurat l'any 1259 i allà va treballar al-Ṭūsī amb un grup de savis vinguts de Damasc, Mossul i altres regions, i també amb alguns astrònoms xinesos. Tenia un gran equipament i una biblioteca molt rica. Es diu que aquest va ser el millor observatori de l'edat mitjana. Al-Ṭūsī va estudiar jurisprudència, filosofia natural, lògica, metafísica, medicina, àlgebra i geometria. Va treballar sobre el cinquè postulat d'Euclides en el problema de la teoria de les paral·leles i va esdevenir un dels precursors de la geometria no euclidiana.

4. *Tractat sobre el quadrilàter complet* (1260)

Al-Ṭūsī va escriure aquesta obra en persa i la va traduir a l'àrab l'any 1260, amb el títol *Kitāb al-ṣakl al-qaṭṭā'* («Llibre sobre el teorema de la secant»), que avui es coneix com a *Tractat sobre el quadrilàter complet*. En aquesta obra, al-Ṭūsī va fer un tractament sistemàtic de la trigonometria plana i, sobretot, esfèrica. És una de les primeres obres on la teoria de resolució de triangles és estudiada de manera independent i no com a auxiliar de l'astronomia.⁶

El *Tractat sobre el quadrilàter complet* consta de cinc llibres⁷: el primer, amb el títol «Sobre les raons compostes i les seves regles en catorze proposicions», tracta de la composició de raons basant-se en els *Elements* d'Euclides; el segon, titulat «Sobre la figura del quadrilàter complet en el pla i les raons que s'hi poden trobar» (en onze capítols), exposa va-

4. Més informació a Villuendas (1981), p. 48-49.

5. Més informació a Català (1981), p. 69-70.

6. L'exemplar que hem treballat està traduït el 1891 al francès per Alexandre Pachà Caratheodory.

7. Més informació a Youschkevitch, (1976), p. 141-145, i Zeller, (1944), p. 9-13.

riants del teorema de Menelau per les diferents formes planes del quadrilàter complet que ell mateix defineix. Les demostracions es basen en la composició de raons dels costats de triangles semblants. El tercer llibre, «Preliminars a la figura coneguda amb la denominació de quadrilàter esfèric i del que és necessari per servir-se'n profitosament», consta de tres capítols. En el primer capítol dóna una sèrie de nocions preliminars sobre el sinus d'un arc que utilitzarà en el capítol tercer i en el capítol segon hi ha la resolució de triangles que es detallarà més endavant. En el llibre quart, que té per títol «Sobre el quadrilàter esfèric i les raons que s'hi troben», al-Ṭūsī estudia els quadrilàters esfèrics i demostra les raons entre els costats i els sinus en els quadrilàters formats en tallar arcs de circumferència. El llibre cinquè, titulat «Explicació dels mètodes que fonamenten la figura del quadrilàter en l'estudi dels arcs de cercles màxims que es tallen sobre la superfície d'una esfera», té set capítols. Tracta de la resolució de triangles esfèrics. Primer fa una classificació detallada de deu tipus de triangles esfèrics, segons els seus angles i segons els seus costats. Després demostra el teorema del sinus i el teorema de les tangents i introdueix les nocions de tangent, cotangent, secant i cosecant.

Les fonts principals de l'obra d'al-Ṭūsī són les obres d'autors grecs, l'*Almagest* de Ptolemeu (al-Ṭūsī, 1891: 55-57), els *Elements* d'Euclides (al-Ṭūsī, 1891: 3-7), *Les esfèriques* de Menelau (al-Ṭūsī, 1891: 107-114) i altres d'autors àrabs que cita constantment.

El text seleccionat per treballar a l'aula és una de les demostracions del teorema del sinus del llibre tercer.

4.1. *El teorema del sinus*

El descobriment del teorema del sinus que relaciona els sinus dels costats i dels angles oposats d'un triangle pla o esfèric va ésser un dels avenços més importants de la trigonometria àrab del segle x. Segons Villuendas (1981: 50-51), la demostració d'aquest teorema neix de la necessitat de simplificar el teorema de Menelau, ja que era laboriós i la seva aplicació no era fàcil. Sembla que hi ha tres matemàtics que es disputen la seva paternitat: Abū Maḥmūd Ḥāmid b. Ḥiḍr al-Ḥujandī (1000 dC), Abū-l-Wafā' (940-998) i Abū Naṣr (1000 dC), però Villuendas (1981: 51) afirma que tots tenen punts de partida diferents i que les demostracions deuen ser independents. Cal remarcar que al-Ṭūsī no fa primer la demostració en el triangle esfèric, sinó que la fa en el context de resolució de triangles plans.

Al-Ṭūsī, en el capítol II del seu llibre, explica que hi ha dos mètodes per resoldre els triangles plans: el mètode dels arcs i les cordes i el mètode dels arcs i els sinus. El primer mètode es basa en el fet que tots els triangles es poden inscriure en un cercle i, per tant, els seus costats es poden considerar cordes. Estudia detalladament tots els casos començant pels triangles rectangles i acabant pels no rectangles, encara que no esmenta el cas en què poden haver-hi dues solucions. Així, coneixent les taules de cordes de Ptolemeu, es poden resoldre els triangles plans. El segon mètode comença amb dues demostracions del teorema del sinus i tot seguit explica com es podria aplicar a triangles rectangles i a triangles no rectangles, encara que no ho fa amb tant detall com en el primer mètode. Per aplicar aquest segon mètode a la resolució de triangles plans cal disposar de les taules de sinus que els àrabs coneixien a través dels *Siddhānta*.

Al-Ṭūsī enuncia el que nosaltres coneixem com a *teorema del sinus* dient que la relació entre els costats d'un triangle és igual a la relació entre els sinus dels angles oposats a

aquests costats. Fa dues demostracions d'aquest enunciat, raonant a partir de construccions geomètriques i distingint entre triangles acutangles i obtusangles en el moment de fer les construccions, encara que les instruccions per fer-les són idèntiques en els dos casos, com també ho són els raonaments que portaran a la conclusió.⁸

Al-Ṭūsī parteix de dos triangles ABC, un d'obtusangle i un acutangle, a partir dels quals dóna les instruccions per fer la construcció següent (figura 1):

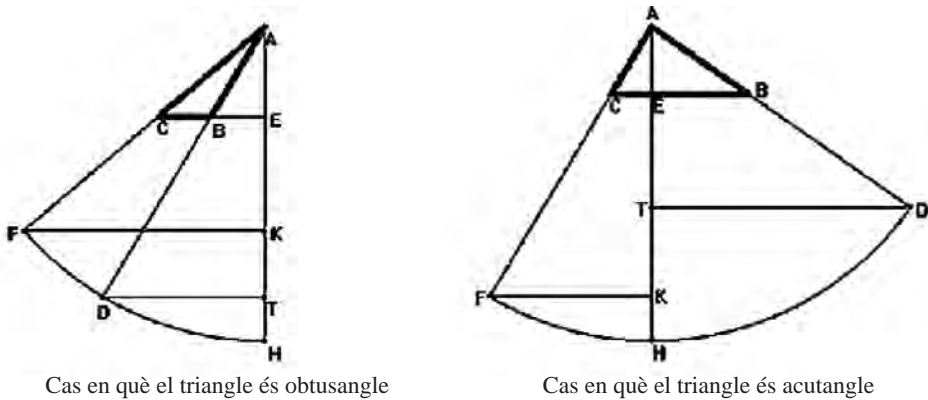


Figura 1.

Traça la perpendicular AE a BC; perllonga (els costats) AB i AC fins a obtenir $AF = AD = 60 = R$. Descriu l'arc DH (amb centre A i radi AD). Traça FK, DT, perpendiculars sobre AH. En el triangle ABE, l'angle E és recte, els angles A i B seran complementaris; $DT = \sin A$; $AT = \sin B$. El mateix en el triangle AEC, $A + C = \text{arc de la semicircumferència}$, $FK = \sin A$; $KA = \sin C$.⁹

DT és el sinus de l'angle BAE i AT el sinus de l'angle ABE. El triangle ACE és rectangle i FK és el sinus de l'angle CAE.¹⁰

Tot seguit al-Ṭūsī diu que pel fet que els triangles ABE i ADT són semblants, es compleix:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD (\text{radi})}{AT (\sin B)} \quad (1)$$

8. Segons Zeller (1944), p. 9, la primera de les demostracions d'al-Ṭūsī del teorema del sinus ja l'havia fet al-Bīrūnī.

9. «Abaissez AE perpendiculaire sur BC; prolongez AB, AC jusqu'à ce que $AF = AD = 60 = R$. Décrivez arc DH. Menez FK, DT perpendiculaires sur AH. Dans le triangle ABE l'angle E étant droit, B sera le complément de A; $DT = \sin A$; $AT = \sin B$. De même dans le triangle AEC, $A + C = \text{arc de demi-circonférence}$, $FK = \sin A$; $KA = \sin C$ » (Nassiruddin, 1891), p. 70-71.

10. A les instruccions que dóna al-Ṭūsī, anomena A tant l'angle BAE com el CAE que són diferents, encara que aquest fet no comporti cap conseqüència equívoca a la demostració.

De la mateixa manera, com que els triangles AEC i AFK són semblants, obtenim:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AK (\sin C)}{AF (\text{radi})} \quad (2)$$

Multiplicant (1) i (2):

$$\frac{AB}{AE} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{AD (\text{radi})}{AT (\sin B)} \cdot \frac{AK (\sin C)}{AF (\text{radi})}$$

i simplificant, obtenim el teorema del sinus:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B}$$

Els dos grans teoremes matemàtics que estan a la base del desenvolupament de la trigonometria àrab van ser el teorema de Menelau i el teorema de Ptolemeu, que d'alguna manera van ésser ampliat amb el teorema del sinus. En aquest sentit, les obres dels àrabs, que arriben a Europa a través de les diferents escoles de traductors al llatí o bé a través de l'obra de Regiomontanus, aporten una millora important en la confecció de les taules trigonomètriques i introdueixen els conceptes de sinus i tangent a Europa.

5. Conclusió

L'ús d'aquests textos de la història de la trigonometria a l'aula ens permet situar cronològicament les aportacions matemàtiques i, en general, científiques de la cultura àrab.¹¹

En el cas concret del desenvolupament de la trigonometria, les obres dels àrabs són una peça clau, ja que si la corda va ser un element essencial dins de la trigonometria grega, el sinus va esdevenir la base de la trigonometria àrab i així els coneixements trigonomètrics àrabs van arribar a ser els fonaments de la nostra trigonometria actual. A l'aula, amb aquesta demostració del teorema del sinus, podem mostrar al nostre alumnat com trobar la proporció entre els costats i els sinus dels angles oposats traçant dos triangles rectangles a partir del donat i construint-ne dos més semblants als anteriors amb hipotenusa igual al radi d'una la mateixa circumferència. La demostració és molt senzilla, diferent de les emprades a l'aula actualment, i aporta una vegada més la idea que l'eina base de la trigonometria és la geometria del triangle.

Bibliografia

AL-ṬŪSĪ, NAṢĪR AL-DĪN (1891), *Traité du quadrilatère*. [Trad. A. Pacha, Constantinoble] CATALÀ, M. A. (1981), «El desarrollo del álgebra y la trigonometría durante los siglos XIII al

11. Es pot utilitzar el text de Vernet (1981), p. 3-21.

- xv». A: VERNET, J. (ed.), *Historia de la ciencia àrabe*, Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, p. 63-80.
- DEBARNOT, M.-T. (1997), «Trigonométrie». A: RASHED, R. (ed.), *Histoire des sciences arabes, mathématiques et physique*, vol. 2, París, Seuil, p. 163-198.
- GUEVARA, I.; CASALS, M. A. (2003), «Resolució de triangles per mètodes geomètrics i mètodes algebraics, en l'obra *De triangulis omnimodis* (1464) de Regiomontanus (1436-1476)». A: BATLLÓ (et al.) (ed.), *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, Barcelona, SCHCT, p. 191-199.
- MASSA, M. R.; ROMERO, F. (2003), «De la geometria a la trigonometria: el teorema de Ptolemeu». A: BATLLÓ (et al.) (ed.), *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, Barcelona, SCHCT, p. 153-159.
- MASSA, M. R. (2003), «Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica», *Biaix*, 21, p. 4-9.
- (2005), «L'ensenyament de la trigonometria: Aristarc de Samos (310-230 aC)». A: GRAP, P.; MASSA, M. R. (ed.), *Actes de la I Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*, Barcelona, SCHCT, p. 95-101.
- MC CARTHY, D. P.; BYRNE, J. G. (2003), «Al-Khwarizmi's Sine Tables and a Western Table with the Hindu Norm of $R=150$ », *Archive for History of Exact Sciences*, 57, p. 243-266.
- NASSIRUDDIN-EL-TOUSSY: vegeu AL-ṬŪSĪ.
- SAMSÓ, J. (1969), *Estudios sobre Abu Nasr Mansur B. 'Ali B. 'Iraq*, Barcelona, Diputació Provincial de Barcelona.
- (1980), «Notas sobre la trigonometria esfèrica de Ibn Muad». A: *Islamic Astronomy and Medieval Spain*, Madrid, Instituto Hispano-Àrabe de Cultura, p. 61-68.
- VERNET, J. (1981), «La originalidad de la ciencia àrabe». A: VERNET, J. (ed.), *Historia de la ciencia àrabe*, Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, p. 3-21.
- VILLUENDAS, M. V. (1979), «La trigonometria europea en el siglo XI. Estudio de la obra de Ibn Muad El Kitab mayhulat». A: *Memorias de la Real Academia de Buenas Letras de Barcelona*, vol. XIX, Barcelona, Instituto de Historia de la Ciencia de la Real Academia de Buenas Letras.
- (1981), «El origen de la trigonometria». A: VERNET, J. (ed.), *Historia de la ciencia àrabe*, Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, p. 39-62.
- WUSSING, H. (1998), «La consolidación de la trigonometría como rama científica independiente». A: *Lecciones de historia de las matemáticas*, Madrid, Siglo XXI de España Editores S. A., p. 86-88.
- YOUSCHKEVITCH, Adolf P. (1976), *Les Mathématiques Arabes (VIII-XV siècles)*, París, Vrin. [Trad. M. Cazeneve i K. Jaouiche]
- ZELLER, S. M. C. (1944), *The development of trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus*, Ann Astor, Michigan, University of Michigan.